Проведенные рассуждения базировались на предположении, что состояние процесса поиска отражается на очереди вершин – листьев текущего дерева. В случае наличия ограничений на пути на графе [1] приходится использовать очередь дуг. Однако легко заметить, что и здесь помеченные дуги (2) по тем же соображениям являются пригодными для ускоренного включения в дерево кратчайших путей. Правило остановки остается без изменений.

Эксперименты показывают, что на графе реальной сети автомобильных дорог, где $|N| \cong 10^4$, $|A| \cong 10^5$, среднее время поиска кратчайших маршрутов между случайными парами вершин сокращается более, чем в два раза. Степень сокращения зависит от количества подмножеств вершин кратчайших путей, ассоциируемых с дугами.

Список цитированных источников

1. Ревотюк, М.П. Поглощение предопределенных решений жадными алгоритмами / М.П. Ревотюк, Н.И. Застенчик, Е.В. Шешко // Известия Белорусской инженерной академии. – № 1(17)/2, 2004. – С. 112–114.
2. Holzer, M. Combining Speed-up Techniques for Shortest-Path Computations / M. Holzer, F. Schulz, D. Wagner, T. Wilhalm // ACM Journal of Experimental Algorithmics. – Vol. 10, Article No. 2.5, 2005. – P. 1–18.

УДК 517.3

ПРИЛОЖЕНИЯ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Карпук И.А.
Брестский государственный технический университет, г.Брест
Научный руководитель: Лебедь С.Ф., к.ф.-м.н., доцент

Определение. Взаимно-однозначное отображение области D на область D* называется конформным, если в окрестности любой точки области D главная линейная часть этого отображения есть ортогональное преобразование, сохраняющее ориентацию.

Из этого определения вытекают два основных свойства конформных отображений:

1. Конформное отображение преобразует бесконечно малые окружности в окружности с точностью до малых высших порядков (круговое семейство).
2. Конформное отображение сохраняет углы между кривыми в точках их пересечения (свойство сохранения углов). Предполагается, что при конформном отображении направление отсчёта углов не изменяется, т.е. сохраняется взаимное расположение (ориентация) кривых. Иногда такое отображением называют конформным отображение первого рода, тогда как при сохранении углов, но изменении ориентации кривых, говорят о конформном отображении второго рода.

Утверждение. Отображение с помощью аналитической, однолистной в конечной области *D* функции является конформным в *D*.

Если функция $\omega = f(z)$, аналитическая в *D*, осуществляет взаимно однозначное отображение, то точки ω называются образами точек *z*, а точки *z* – прообразами. В силу свойств взаимно однозначного отображения образом области *D* как открытого множества, состоящего из внутренних точек, является область *G*, а образом кривой γ – границы области *D* ($\gamma = \delta D$) – является кривая Γ – граница области *G* ($\Gamma = \delta G$).

В теории и практике конформных отображений ставятся и решаются две задачи.

Первая задача: нахождении образа данной линии или области при заданном отображении – прямая задача.

Вторая – нахождение функции, осуществляющей отображение данной линии или области на другую заданную линию или область – обратная задача.

На практике при нахождении образов с помощью отображений элементарных функций комплексного переменного используются свойства этих отображений, например круговое свойство дробно-линейного отображения или свойство функции $\omega = z^n$ увеличивать углы в n раз. При решении обратной задачи используют также некоторый набор известных отображений, так называемая «таблица» отображений.

Получим формулы для вычисления площади образа области и длины образа кривой при заданном отображении.

Замечание. Отображение *ω = f(z)* комплексной плоскости эквивалентно отображению:

$$u = u\,(x, y) \qquad\qquad v = v\,(x, y),$$

где *ω= u + iv*, а *f(z)= u (x, y) + iv (x, y)*. Якобиан этого отображения равен:

$$J(x,y)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Используя условия Коши-Римана, получаем: $J(x,y)=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2$. Так как $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$, то $J(x,y)=\left|f'(z)\right|^2$.

Вывод. Учитывая геометрический смысл якобиана, можем сказать, что величина: $|f'(z)|^2$ представляет собой коэффициент изменения площади при отображении *ω=f(z)*. Эта величина зависит от значений двух переменных *x* и *y*, являющихся координатами точки $z \in$ J . При этом, если $f'(z_0)\neq 0$, то якобиан в точке z_0 также отличен от нуля.

Исходя из геометрического смысла величин $|f'(z)|^2$ и $|f'(z)|$, можно получить формулы вычисления площади образа области и длины образа кривой при отображении *ω=f(z)*.

Пусть функция *ω=f(z)* конформно отображает область *D* на *D** (т.е. отображение *ω=f(z)* конформно в каждой точке области *D*). Известно, что площадь *S** области *D** выражается двойным интегралом $\iint\limits_{D^*} du dv$. Используя правило замены переменных в двойном интеграле, получаем

$$S^*=\iint\limits_{D^*} du dv=\iint\limits_{D}\left|J(x,y)\right|dx\,dy=\iint\limits_{D}\left|f'(z)\right|^2 dx\,dy\,. \qquad (1)$$

Пусть теперь γ – кривая в области D, а γ* – ее образ при отображении *ω=f(z).* Дифференциал *dl* длины дуги в плоскости *(z)* равен $dl=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=|dz|,\, dz=dx+idy$, а дифференциал *dl** длины дуги в плоскости *(ω)* равен:

$$dl^*=\sqrt{(du)^2+(dv)^2}=|d\omega|=|f'(z)dz|=|f'(z)||dz|.$$

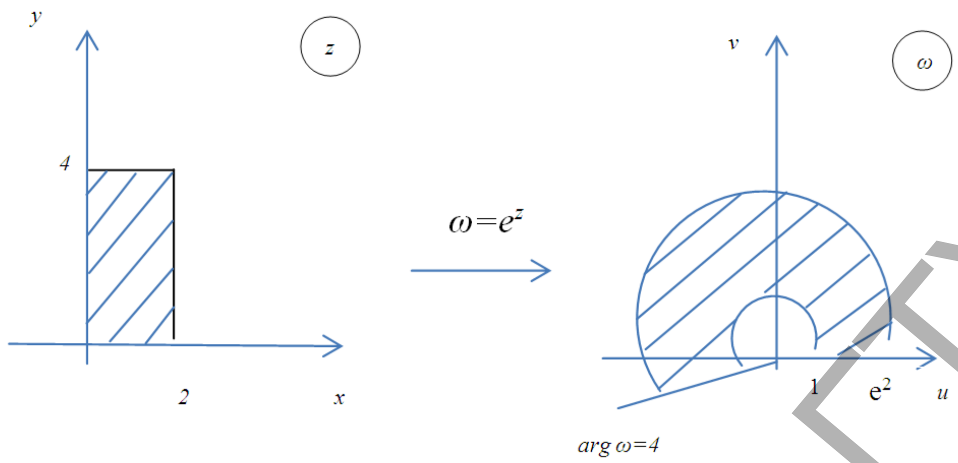
Учитывая представление длины кривой с помощью криволинейного интеграла и формулу замены переменных в таком интеграле, заключаем, что длину *l** образа γ* кривой γ при отображении *ω=f(z)* можно вычислить по формуле:

$$l^*=\int\limits_{\gamma^*}|d\omega|=\int\limits_{\gamma}|f'(z)||dz|\,. \qquad (2)$$

Рассмотрим применение полученных формул на практике.

Постановка задачи. Найти площадь области, являющейся образом прямоугольника $\left\{(x;y)\in \text{Ÿ}^2 : 0\le x\le 2, 0\le y\le 4\right\}$ при отображении $\omega = e^z$.

Решение. Изобразим образ прямоугольника при заданном отображении:



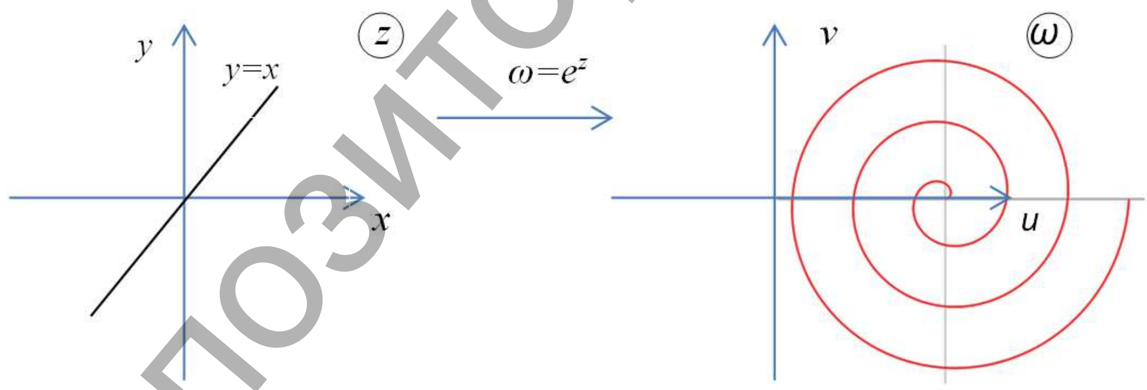
Используя формулу (1), имеем:

$$S=\iint_{D^*} dudv=\iint_{D}|f'(z)|^2\,dxdy=\left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y,\ \frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y\Rightarrow f'(z)=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^z \\ f(z)=e^z=e^x\cos y+ie^x\sin y\Rightarrow u=e^x\cos y,\ v=e^x\sin y \end{array}\right\}\Rightarrow \\ \Rightarrow|f'(z)|^2=e^{2x} \end{array}\right]=$$

$$=\iint_D e^{2x}dxdy=\int_0^2 e^{2x}dx\int_0^4 dy=2\left(e^4-1\right).$$

Постановка задачи. Найти длину участка спирали, являющейся образом отрезка $y=x, 0\le x\le 2\pi$ при отображении $\omega=e^z$.

Решение. Изобразим образ прямой при заданном отображении:



Используя формулу (2), имеем:

$$l=\int_\gamma |f'(z)||dz|=\left[\begin{array}{l} |f'(z)|=e^x \\ dz=d(x+iy)=[y=x]=(1+i)dx, \\ |dz|=\sqrt{2}dx \end{array}\right]=\int_0^{2\pi} e^x\sqrt{2}dx=\sqrt{2}\left(e^{2\pi}-1\right).$$

Список цитированных источников

1. Морозова, В.Д. Теория функций комплексного переменного: учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 520 с.

2. Лаврентьев, М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1987. – 688 с.